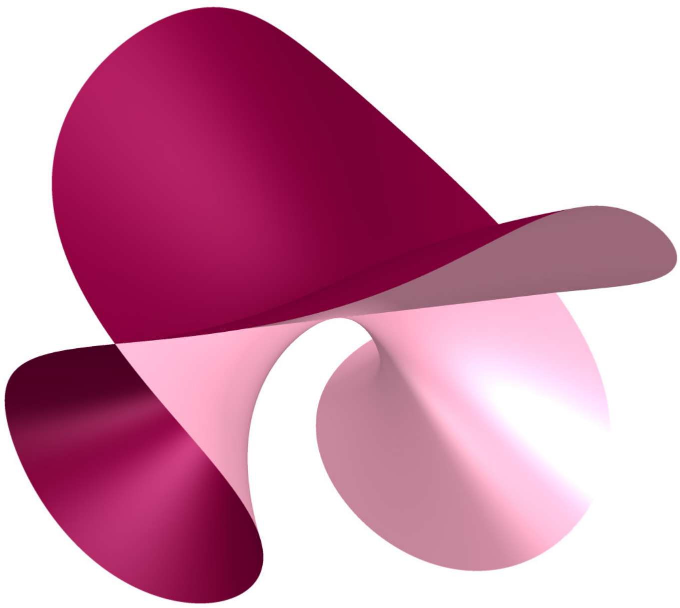
Exposition itinérante
des mathématiques:



# Géométrie, un monde à toutes allures

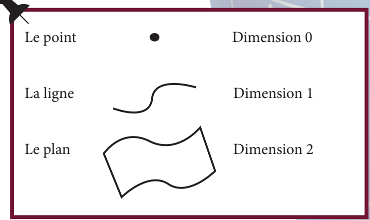
Institut de
Mathématiques de
Bordeaux

FONDATION
BLAISE PASCAL

# Les surfaces

Une **surface** mathématique est un objet qui de près ressemble à un plan, de la même manière que la Terre semble plate à notre échelle.

Les surfaces sont partout autour de nous ! Elles apparaissent par exemple comme contour d'objets du quotidien.

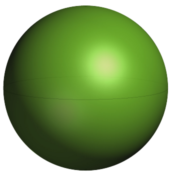




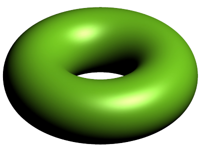
On peut se repérer sur une surface à l'aide de deux coordonnées, comme la latitude et la longitude sur la Terre : c'est un objet de dimension **deux**.

## Nos protagonistes principaux

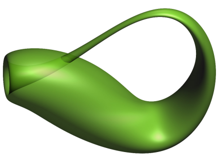
La sphère



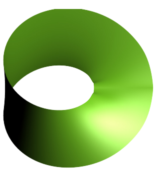
Le tore

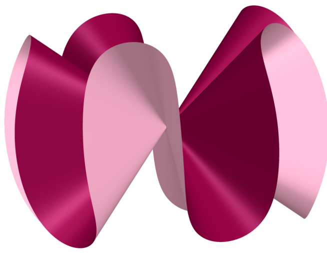


La bouteille de Klein

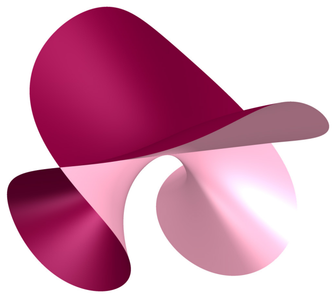


Le ruban de Moebius

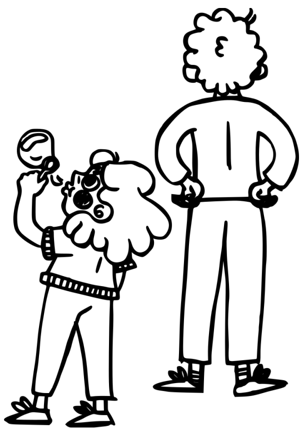


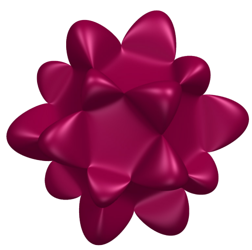


Plus abstraitement on peut créer des surfaces comme solutions d'équations polynomiales



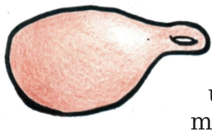
$$x^2 = y^2 z^2 + z^3$$

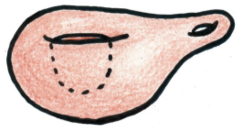




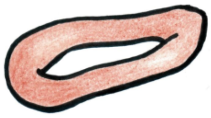
# La géometrie de la pâte à modeler

Deux surfaces sont dites **homeomorphes** si on peut déformer l'une en l'autre sans déchirement ni recollement.

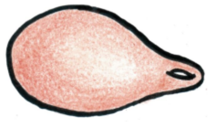


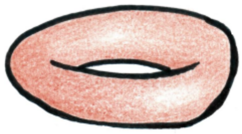


Imaginons une tasse faite avec de la pâte à modeler. On peut la déformer, sans la couper ni la déchirer, pour en faire un donut (dont le contour est un **tore** qu'on a déjà rencontré).



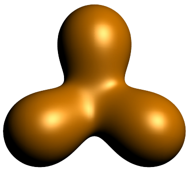
Et vice versa !

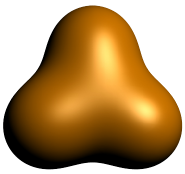


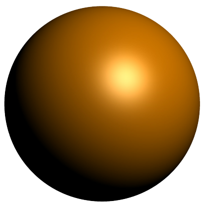


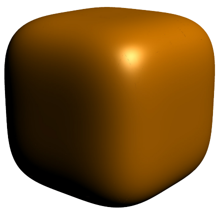
Le contour de la tasse et le tore sont homéomorphes!

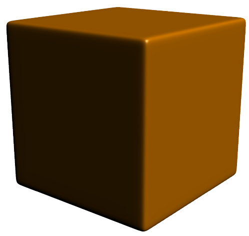
La **topologie** est la branche des mathématiques qui cherche à comprendre les propriétés géometriques des objets qui sont conservées au cours des déformations. On considère deux objets comme étant les mêmes s'ils sont homéomorphes.

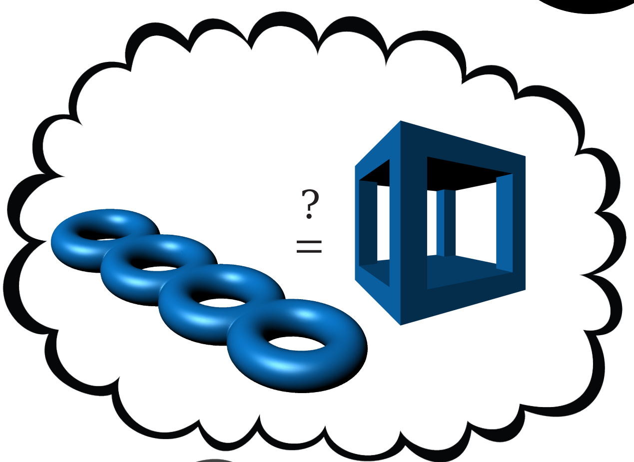






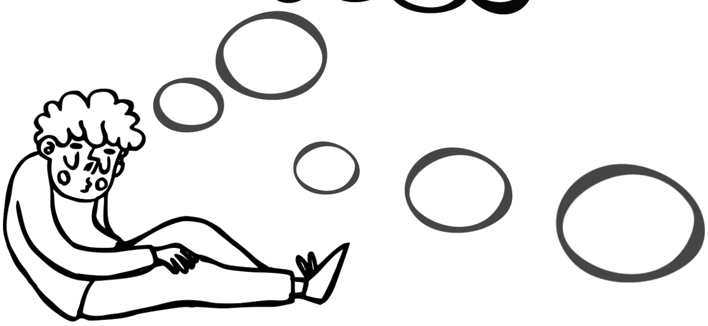


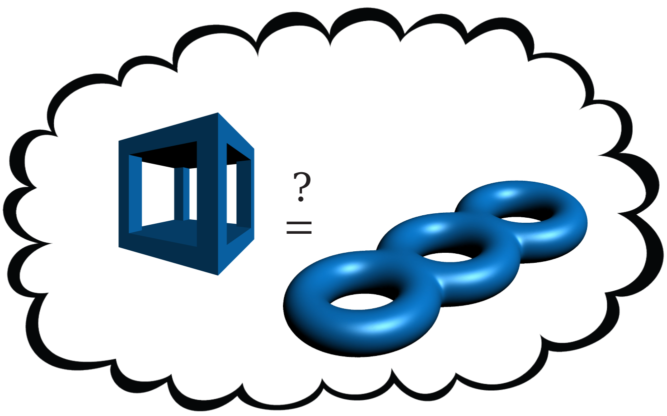





*QUIZ:*

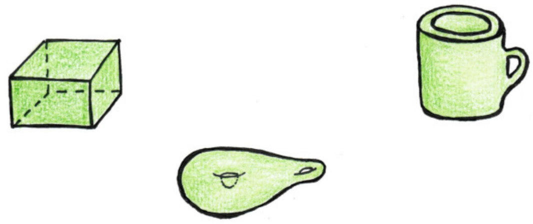
Pouvez vous aider notre ami rêveur ? Quelles surfaces sont les mêmes ?

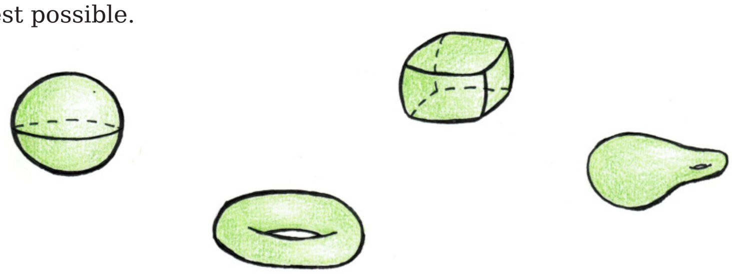




# Courbes séparantes

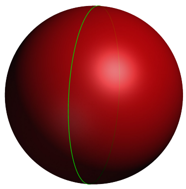
Avec des objets en pâte à modeler, déformer un cube en sphère ou une tasse à café en bouée n'a rien de sorcier. En fait un peu d'imagination suffit à transformer une surface en une autre, tant que c'est possible.

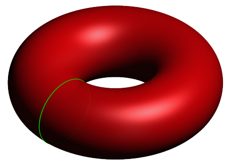




## Mais est-ce toujours possible ?

Peut-on sans déchirement ni collage passer d'une sphère à un tore ? Difficile à croire. Mais comment prouver que c'est impossible ?



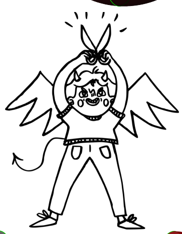


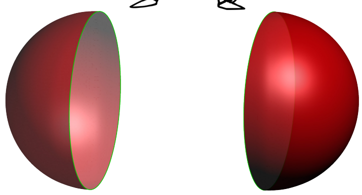
## Une idée : découper le long d'une courbe

Sur notre surface on trace une boucle : une courbe qui revient à son point de départ. Attention, on interdit les croisements !

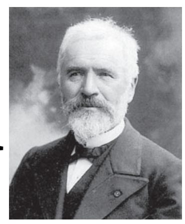
Avec des ciseaux, on découpe le long de cette courbe.

On compte le nombre de morceaux.



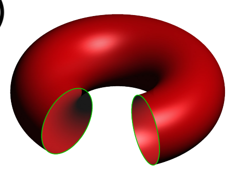


Sur la sphère on obtient **toujours** deux morceaux !

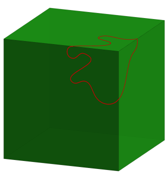


C. Jordan 1887

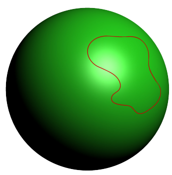
Mais pas sur le tore !



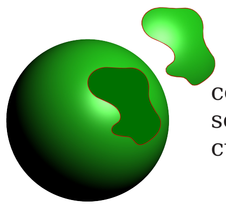
## Le nombre de morceaux obtenus reste le même après déformation :



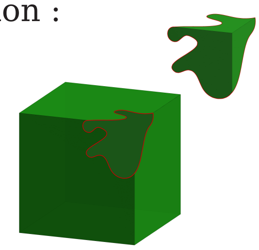
On prend une boucle sur le cube. On déforme le tout,



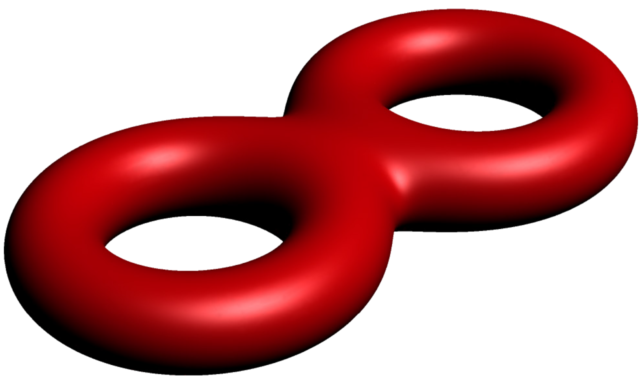
on coupe:



cette boucle sépare bien le cube en deux morceaux !



## Comme le tore admet une courbe qui ne le sépare pas en deux morceaux, il n'est pas obtenu en déformant la sphère !

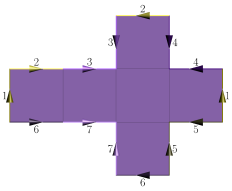


## Et les bouées avec plus de trous ?

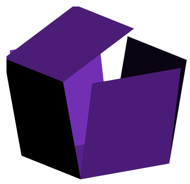
On peut distinguer les surfaces en fonction de leur nombre de trous. Pour le voir on les découpe le long de plusieurs boucles. Par exemple sur la bouée ci-contre on peut tracer deux boucles qui ne se croisent pas, et telles qu'en les découpant on ait toujours un seul morceau. Les voyez vous ?
Est-ce possible sur le tore ?

# Construction de surfaces

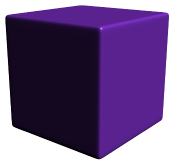
Voici un patron...

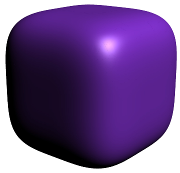


on recolle les côtés
de même numéro

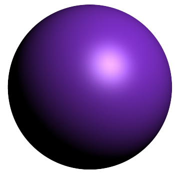


on obtient...



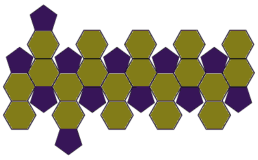


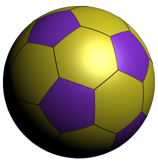
une sphère !



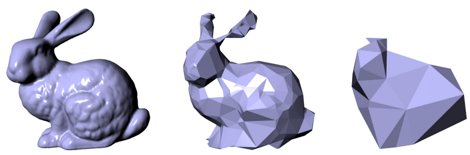
C'était donc un patron de la sphère !

En voici un autre :

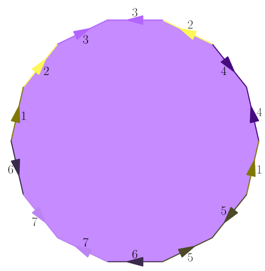




Et encore d'autres (non dépliés):

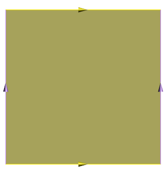


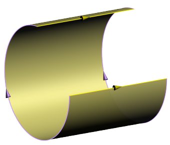
Puisqu'on peut déformer les surfaces, on peut aussi déformer les patrons. Finalement la seule chose qui nous intéresse c'est la manière dont les côtés sont recollés deux à deux (en respectant le sens des flèches).



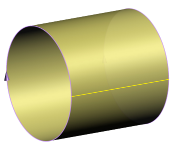
Par exemple ce polygone à 14 côtés est un patron de la sphère : il se déforme en le premier patron en gardant le même ordre de recollement.
Le voyez-vous ?

Partons d'une forme simple, un carré, et recollons ses côtés des plusieurs façons... quelles surfaces obtient-on ?

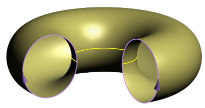




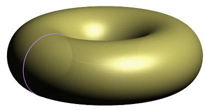
On recolle le haut et le bas



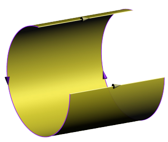
On obtient un tube

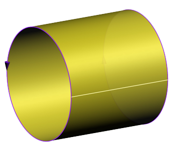


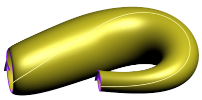
On recolle les deux
cercles en respectant
le sens des flèches



C'est un tore !



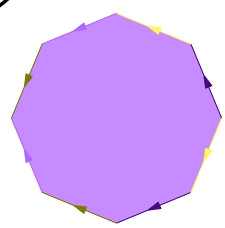




C'est une bouteille
de Klein !

On a dû traverser le
tube pour recoller !

Tout patron donne une surface et toute surface possède un patron. Mais ce n'est pas toujours facile de deviner quelle sera la surface associée à un patron.

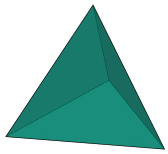



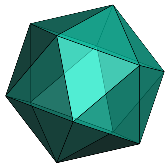
# La caractéristique d'Euler-Poincaré

Pour un polyèdre on note :

S son nombre de sommets
A son nombre d'arêtes
F son nombre de faces

S=4
A=6
F=4

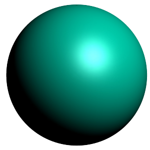


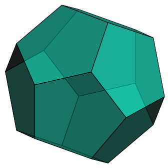


S=12
A=30
F=20

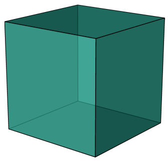
Sa caractéristique d'Euler-Poincaré est le nombre

χ = S - A + F



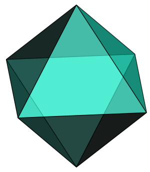


S=8
A=12
F=6

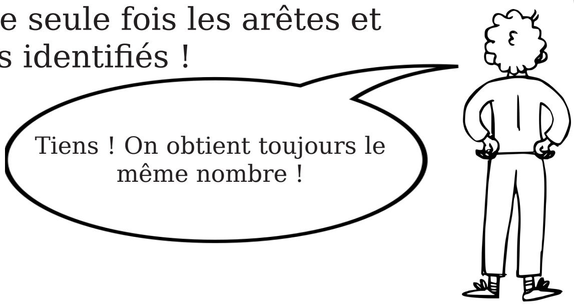


S=20
A=30
F=12

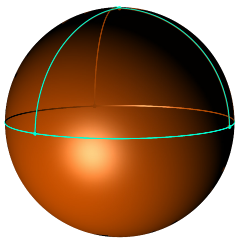
On peut appliquer la même formule à tout patron en faisant attention à compter une seule fois les arêtes et les sommets identifiés !

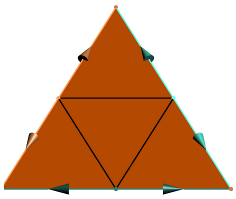


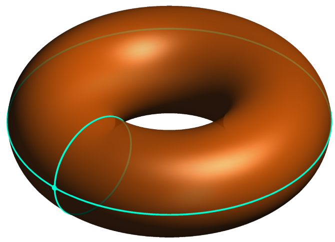
S=6
A=12
F=8

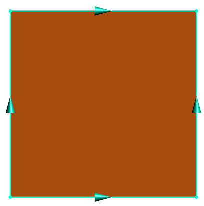



Pour calculer la caractéristique d'Euler-Poincaré d'une surface on prend un patron qui lui est associé, ce qui est toujours possible, et on applique la formule. Le théorème d'Euler-Poincaré nous dit que ce nombre ne dépend pas du choix du patron. Voilà pourquoi on a obtenu toujours le même nombre pour les polyèdres ci desous.



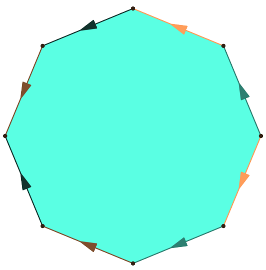






χ = 4-6+4 = 2 ou χ = 1-3+1 = 2 en oubliant les arêtes intérieures.

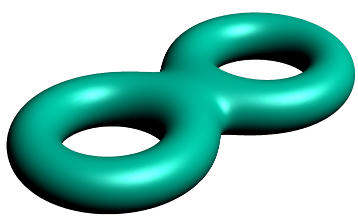
χ = 1-2+1 = 0



Deux surfaces qui ont des caractéristiques d'Euler-Poincaré différentes ne sont pas les mêmes. Par exemple le patron ci-contre donne χ = -2 et donc ce n'est le patron ni d'une sphère ni d'un tore.

Le patron ci-contre représente une bouée à deux trous.

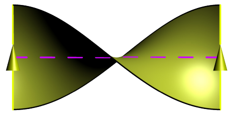
Plus généralement le nombre de trous d'une bouée est $1 - \frac{\chi}{2}$

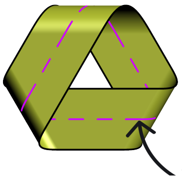


# Orientabilité

Voici un ruban de Moebius

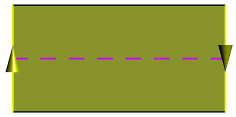
Il est obtenu en recollant en sens inverse
les extrémités d'une bande de papier.



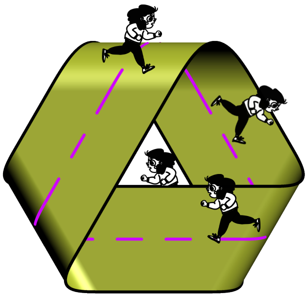


La ligne en pointillée au centre est appellée l'âme du ruban

Il a donc comme patron



Si  court le long de l'âme il se passe ceci : après un tour elle revient à son point de départ mais de l'autre côté ! Ce ruban n'a qu'une face.

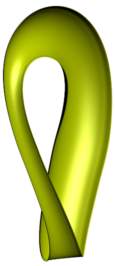


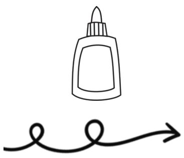
Le bord du ruban n'est constitué que d'un cercle qui fait deux fois le tour de l'ame.

*QUIZ* :

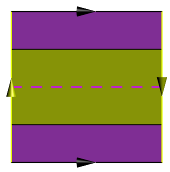
Consture un ruban de Moebius en papier. Le découper le long de son âme. Combient de morceaux obtient-on ?

Il existe des surfaces contenant un ruban de Moebius. Elles n'ont qu'une seule face et sont dites **non orientables**. Construisons maintenant une telle surface en recollant deux rubans de Moebius bord à bord.

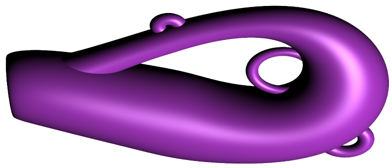




On obtient une bouteille de Klein. C'est une bouteille qui n'a ni intérieur ni extérieur. On reconnait la surface d'un précédent poster.

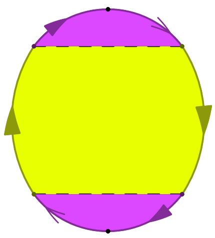


On peut créer d'autres surfaces sans extérieur ni intérieur. Par exemple en compliquant la bouteille de Klein.



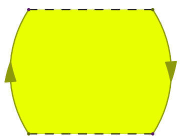
Les surfaces qui definissent un intérieur et un extérieur sont celles qui ne contiennent pas de ruban de Moebius.

Mais il existe une surface à ruban plus simple.
La surface dont le patron est celui-ci :

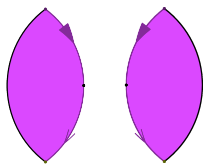


elle est constituée

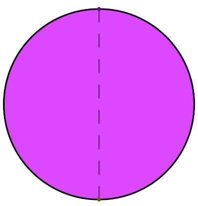
d'un ruban de Moebius



et de



Les parties violettes se recollent et donnent un disque

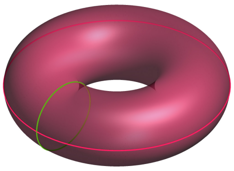


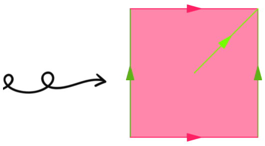
Après recollement on obtient :

# Couper et coller

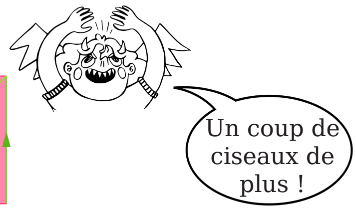
## Différents patrons du tore

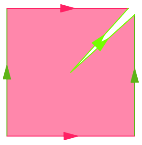
On coupe



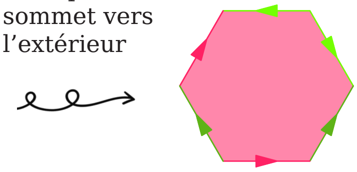


pour obtenir le patron habituel du tore



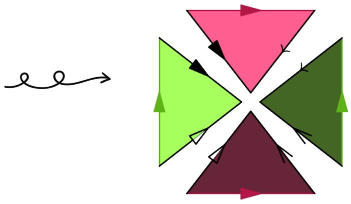



on déplace le sommet vers l'extérieur

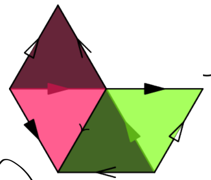


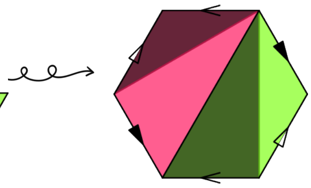
on obtient un autre patron du tore

Mais on aurait pu couper plus méchamment...



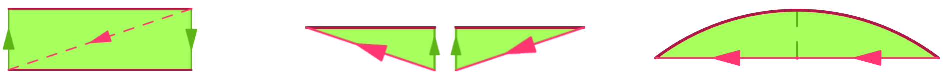
...et coller plus maladroitement...



...on aurait obtenu encore un autre patron

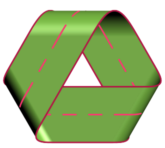
Même le ruban de Moebius peut être déguisé



La méthode de couper et coller peut être utile pour comparer deux surfaces

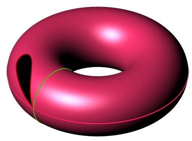
Si on colle

un ruban de Moebius



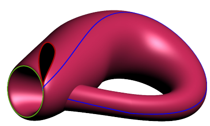
sur

un tore troué

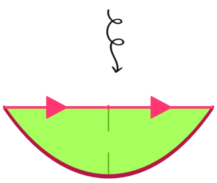


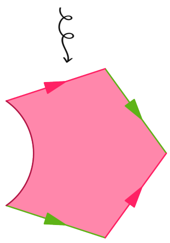
ou

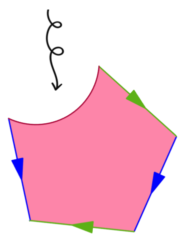
une bouteille de Klein trouée



bord à bord

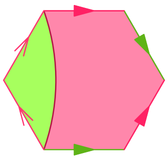




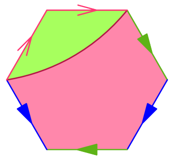


obtient-on la même surface ?

La première surface a donc comme patron

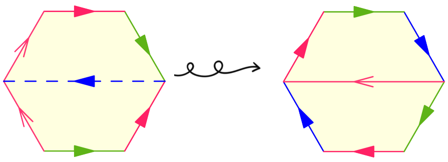


et la deuxième

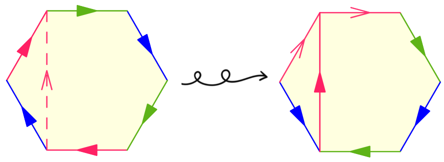


Ces deux surfaces sont les mêmes. On le montre en coupant et collant le premier patron de façon à obtenir le deuxième

Étape 1



Étape 2



Où signifie : on coupe, on colle, on déforme